Structuur van melkwegstelsels
Werkstuk 1 & 2

Olof van den Berg
Hugo Buddelmeijer
Arjen Siegers
Marlies Spijkman

February 15, 2002

1 Kleur- en helderheids-evolutie van een enkele stercluster

In dit werkstuk kunnen we bij de meeste berekeningen benaderingen gebruiken om het analytisch makkelijker te maken, maar bij sectie E word het analytisch toch erg lastig om alles met de hand uit te rekenen dus hebben we het daar met mathematica gedaan. Aangezien het een kleine moeite is om dan meteen die benaderingen niet te maken hebben we het model zowel met als zonder die benaderingen door gerekent.
Om duidelijk te maken wat de substituties inhouden hebben we die een kleur gegeven zodat ze makkelijk herkenbaar zijn. De constante C word gegeven door de rode (2) en kan benaderd worden door het lichtrode (oranje) (3). Benadering (8) vervangt het donker groene door het licht groene.
De benaderingen zijn gebaseert op het respectivelijk kiezen van M_U oneindig en M_L nul. Dit levert bij deze substituties niet zo'n probleem op, maar M_U oneindig kiezen later wel, met tot gevolg dat t_L naar 0 gaat waardoor de integralen van sectie E ook oneindig worden. Dit voorkomen we meteen al bij het begin door goede domeinen voor de functies te kiezen.

1.1 A. Initial Mass Function

De Initial Mass Function (IMF) is gedefineerd als (1), maar wel alleen tussen een lower (M_L) en upper (M_U) limiet voor de massa (M) van de sterren, daarbuiten is de IMF 0.

$$\Phi(M)dM = CM^{-1-x}dM \tag{1}$$

We berekenen C door de IMF te normaliseren:

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{M_L}^{M_U} CM^{-1-x} dM \\
&= -\frac{C}{x} M^{-x} \Big|_{M_L}^{M_U} \\
&= -\frac{C}{x} \left(M_U^{-x} - M_L^{-x} \right) \\
&= \frac{C}{x} \left(M_L^{-x} + M_U^{-x} \right) \\
C &= \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} \qquad (2) \\
&= \frac{x}{\left(\frac{1}{M_L}\right)^x + \left(\frac{1}{M_U}\right)^x} \\
\frac{1}{M_U} &\ll \frac{1}{M_L} \\
C &\simeq x M_L^x \qquad (3)
\end{aligned}
$$

We zullen voor zoveel het kan de exacte waarde voor C (2) gebruiken tenzij het analytisch veel handiger is om (3) te gebruiken.

De genormaliseerde IMF is:

$$
\begin{aligned}
\Phi(M) &= \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} M^{-1-x} \qquad (4) \\
&\simeq x M_L^x M^{-1-x} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

1.2 B. Main Sequence

Het totale licht van de Main Sequence van een Single Burst (L_{MS}) is de integraal over al het licht dat sterren met een verschillende massa uitsenden. Een ster met massa M blijft voor $t_{MS} = M^{-\gamma}$ (11) op de hoofdreeks en word daarna een reus. Voor de hoofdreeks moeten we dus alleen de sterren meetellen die nog niet een reus geworden zijn, dat geeft een upperlimiet aan de massa want de zware sterren verlaten de hoofdreeks eerder. We integreren dus over $M_L < M < M_t$, waarbij $M_t = t^{-\frac{1}{\gamma}}$.

$$
\begin{aligned}
L_{MS}(t) &= \int_{M_L}^{M_t} \Psi_0 M^\alpha \Phi(M) \, dM \qquad (6) \\
&= \Psi_0 \int_{M_L}^{M_t} M^\alpha M^{-1-x} C x dM \\
&= \Psi_0 C \int_{M_L}^{M_t} M^{\alpha-x-1} dM \\
&= \Psi_0 C \frac{1}{\alpha - x} M^{\alpha-x} \Big|_{M_L}^{M_t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{\Psi_0}{\alpha-x}\left(M_t^{\alpha-x}-M_L^{\alpha-x}\right) && (7)\\
M_t &\gg M_L && (8)\\
L_{MS}(t) &\simeq \frac{\Psi_0}{\alpha-x}xM_L^{x}M_t^{\alpha-x} && (9)
\end{aligned}
$$

Voor $t < t_{MS}(M_U) = t_L$ zullen er nog geen sterren van de hoofdreeks af zijn want er zijn geen sterren met een massa groter dan M_U. Voor $t < t_L$ geld dus $L_{MS}(t) = L_{MS}(t_L)$. Dit is nu nog niet zo'n probleem, maar verderop als we over meerdere Single Bursts gaan integreren wel en moeten daar dus nu al rekening mee houden. In principe hebben we dus ook een upperlimiet voor $t > t_{MS}(M_L) = t_U$ waarbij alle sterren van de hoofdreeks af zijn, maar deze is zo groot dat we daar niet mee te maken hebben

1.3 C Reuzen

De tijd dat een ster op de hoofdreeks doorbrengt is t_{MS} (11), daarna worden het reuzen. Het totaal aantal reuzen in een stelsel kun je benaderen door alleen het aantal reuzen te nemen die op dat moment gevormd worden vermenigvuldigt met hoelang ze licht geven (t_g). Dit mag omdat t_g veel kleiner is dan t. Het gedeelte van de sterren dat een reus word is het gedeelte dat in een tijdsspanne van t_g de hoofdreeks verlaat, en dus $\dot{\mathrm{M}}$. Het totaal aantal reuzen is dus gegeven door (10).

$$
\begin{aligned}
N_g(t) &= \Psi_0\Phi(M_t)\left|\frac{dM}{dt_{MS}}\right|_{M_t} t_g && (10)\\
t_{MS} &= M^{-\gamma} && (11)\\
M &= t_{MS}^{\frac{-1}{\gamma}} && (12)\\
\frac{dM}{dt_{MS}} &= -\frac{1}{\gamma}t_{MS}^{-\frac{1}{\gamma}-1} = -\frac{1}{\gamma}t_{MS}^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{t_{MS}}\\
&= -\frac{1}{\gamma}MM^{\gamma} = -\frac{1}{\gamma}M^{1+\gamma}\\
N_g &= \Psi_0 C M_t^{-1-x}\frac{-1}{\gamma}M_t^{1+\gamma}t_g = \frac{\Psi_0}{\gamma}CM_t^{\gamma-x}t_g\\
&= \frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{\Psi_0}{\gamma}M_t^{\gamma-x}t_g && (13)\\
&\simeq\ = \frac{\Psi_0}{\gamma}xM_L^{x}M_t^{\gamma-x}t_g && (14)
\end{aligned}
$$

Ook hier weer moeten we er rekening mee houden dat dit alleen maar opgaat voor $t > t_L$, daar voor zijn er nog geen reuzen en geld $N_g = 0$.

1.4 D Single Burst

We gaan nu de totale lichtsterkte van een Single Burst berekenen en bekijken welke kleur ons melkwegstelsel zou moeten hebben als er slechts één Single Burst is geweest.

$$
\begin{aligned}
L_{SB}(t) &= L_{MS}(t) + N_g(t)L_g \qquad (15) \\
&= \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} \frac{\Psi_0}{\alpha - x}\left(M_t^{\alpha-x} - M_L^{\alpha-x}\right) + \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} \frac{\Psi_0}{\gamma} M_t^{\gamma-x} t_g L_g \\
M_t &= t^{-\frac{1}{\gamma}} \\
L_{SB}(t) &= \Psi_0 \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} \left(\frac{t^{\frac{x-\alpha}{\gamma}} - M_L^{\alpha-x}}{\alpha - x} + \frac{1}{\gamma} t^{\frac{x}{\gamma}-1} t_g L_g \right) \qquad (16) \\
&\simeq \Psi_0 x M_L^x \left(\frac{t^{\frac{x-\alpha}{\gamma}}}{\alpha - x} + \frac{t^{\frac{x}{\gamma}-1}}{\gamma} t_g L_g \right) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Hierbij moet nogmaals opgemerkt worden dat deze formule alleen geldt voor $t > t_L$, voor $t < t_L$ geldt $L_{SB} = L_{MS}$ omdat er dan nog geen reuzen zijn.

Inputwaarden:

$$\alpha_U = 4.9 \qquad \alpha_B = 4.5 \qquad \alpha_V = 4.1$$

$$(L_g)_U = 35 \qquad (L_g)_B = 60 \qquad (L_g)_V = 90$$

$$U_\odot = 5.40 \qquad B_\odot = 5.25 \qquad V_\odot = 4.70$$

$$\gamma = 3.0$$

$$M_L = 0.1 \qquad x = 1.35 \qquad t_g = 0.03$$

Voor de verschillende banden vereenvoudigt (17) tot:

$L_U(t) = \psi_0(0.017t^{-1.18} + 0.021t^{-0.55})$
$L_B(t) = \psi_0(0.019t^{-1.05} + 0.036t^{-0.55})$
$L_V(t) = \psi_0(0.022t^{-0.92} + 0.054t^{-0.55})$

De absolute magnitudes zijn:

$M_U = U_\odot - 2.5logL_U(t) = 5.40 - 2.5(log\psi_0 + log(0.017t^{-1.18} + 0.021t^{-0.55}))$
$M_B = B_\odot - 2.5logL_B(t) = 5.25 - 2.5(log\psi_0 + log(0.019t^{-1.05} + 0.036t^{-0.55}))$
$M_V = V_\odot - 2.5logL_V(t) = 4.70 - 2.5(log\psi_0 + log(0.022t^{-0.92} + 0.054t^{-0.55}))$

Bij de berekening van (U-B) en (B-V) valt logψ_0 weg. Invullen voor t= 0.01, 0.1 en 1 in (17) geeft de volgende waarden:

$t(10Gyr)$	$L_U(L_\odot)/\Psi_0$	$L_B(L_\odot)/\Psi_0$	$L_V(L_\odot)/\Psi_0$	$(U-B)$	$(B-V)$
0.01	4.22	2.87	2.17	-0.269	0.252
0.1	0.334	0.343	0.374	0.180	0.642
1	0.0381	0.0553	0.0762	0.555	0.897

Ingevult in de niet gesimplificeerde functie voor de L_{SB} (16) geeft:

$t(10Gyr)$	$L_U(L_\odot)/\Psi_0$	$L_B(L_\odot)/\Psi_0$	$L_V(L_\odot)/\Psi_0$	$(U-B)$	$(B-V)$
0.01	4.22	2.87	2.19	-0.270	0.252
0.1	0.334	0.343	0.373	0.179	0.642
1	0.0381	0.0553	0.0762	0.555	0.897

Dit maakt maar een heel klein beetje uit voor lage t, maar is nauwlijks significant, later maakt dit wel iets meer uit.

2 Kleuren van diverse typen van stelsels na 10 Gyr

2.1 E

Aangezien er niet één Single Burst geweest is in ons melkwegstelsel, maar een continue vorming van nieuwe sterren gaan we integreren over meerdere Single Bursts. Daartoe vervangen we nu Ψ_0 door een $\Psi(t)$, de Star Formation Rate, omdat niet elke burst evenveel sterren vormt. De Star Formation Rate (SFR) is:

$$\Psi(t) = \begin{cases} \Psi_0(1-at) & \text{voor } t \leq 1/a \\ 0 & \text{voor } t \geq 1/a \end{cases} \tag{18}$$

Met $0 \leq a \leq 1$. We zitten nu ongeveer bij $t = 1$ (10Gyr) waarvoor we ook de kleur gaan berekenen, t zal dus nooit groter zijn dan $1/a$ dus krijgen we altijd:

$$\Psi(t) = \Psi_0(1-at) \tag{19}$$

De totale helderheid van een stelsel op tijdstip t is nu dus:

$$L(t) = \int_0^t \Psi(t-t')L_{SB}(t')dt' \tag{20}$$

Waarbij L_{SB} dezelfde L_{SB} als boven is, maar dan zonder Ψ_0 erin, die is vervangen door een $\Psi(t)$ erbuiten. We integreren dus over alle Single Bursts, waarbij we beginnen bij de Single Burst die nu plaats vind met een $\Phi(t)$, en dus al een tijd van $t' = 0$ bestaat en eindigen bij de eerste Single Burst, met een $\Phi(0)$ die al een tijd $t' = t$ bestaat. Je kan de integraal ook omdraaien dat je bij de eerste burst begint en bij de laatste eindigt, je krijgt dan:

$$L(t) = \int_0^t \Psi(t')L_{SB}(t-t')dt' \tag{21}$$

Dit levert uiteraard dezelfde waardes op, dus we gaan van (20) uit.
Bij deze berekening moeten we erop letten dat we niet M_U oneindig en t_L nul kiezen, want voor kleine t komt er dan oneindig uit de integraal. We zullen $L(t)$ dus moeten opsplitsen in een deel voor $t < t_L$ en een deel $t > t_L$. Het deel voor $t > t_L$ moet helaas nog een keer opgesplitst worden in een deel voor $t' < t_L$ en een deel voor $t' > t_L$. Dit komt bij het eerste deel van $L(t)$ niet voor, want dan is t' altijd kleiner dan t_L.
We berekenen nu eerst $L(t)$ voor $t < t_L$ (oa geen reuzen).

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= \int_0^t \Psi(t')L_{SB}(t-t')dt', t < t_L \\
&= \int_0^t \Psi(t')L_{MS}(t-t')dt' \\
&= \int_0^t \Psi(t')L_{MS}(t_L)dt' \\
&= \int_0^t \Psi_0(1-at+at')\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{1}{\alpha-x}\left(M_U^{\alpha-x}-M_L^{\alpha-x}\right)dt' \qquad (22) \\
&= \Psi_0\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{1}{\alpha-x}\left(M_U^{\alpha-x}-M_L^{\alpha-x}\right)\int_0^t (1-at+at')dt' \\
&= \Psi_0\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{1}{\alpha-x}\left(M_U^{\alpha-x}-M_L^{\alpha-x}\right)\left(t'-att'+\frac{1}{2}at'^2\right)\Bigg|_{t'=0}^{t'=t} \qquad (23) \\
&= \Psi_0\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{1}{\alpha-x}\left(M_U^{\alpha-x}-M_L^{\alpha-x}\right)\left(t-\frac{1}{2}at^2\right), t < t_L \qquad (24)
\end{aligned}$$

Voor $t > t_L$ moeten we weer opsplitsen naar t' want die kan nu groter en kleiner dan t_L zijn. Voor $t' < t_L$ is het gemakkelijk, we hoeven alleen bij (23) t' niet van 0 tot t te laten lopen maar helemaal van 0 tot t_L. Dan krijgen we:

$$L_{2a}(t) = \Psi_0\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\frac{1}{\alpha-x}\left(M_U^{\alpha-x}-M_L^{\alpha-x}\right)\left((1-at)t_L+\frac{1}{2}at_L^2\right) \qquad (25)$$

Voor het gedeelte van $L_2(t)$ waar $t' > t_L$ krijgen we een iets ingewikkeldere uitdrukking, maar desalnietemin uitrekenbaar:

$$\begin{aligned}
L_{2a}(t) &= \int_{t_L}^t \Psi(t-t')L_{SB}(t')dt' \\
&= \int_{t_L}^t \Psi_0(1-at+at')\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\left(\frac{t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}}-M_L^{\alpha-x}}{\alpha-x}+\frac{1}{\gamma}t'^{\frac{x}{\gamma}-1}t_gL_g\right)dt' \\
&= \Psi_0\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\int_{t_L}^t (1-at+at')\left(\frac{t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}}-M_L^{\alpha-x}}{\alpha-x}+\frac{1}{\gamma}t'^{\frac{x}{\gamma}-1}t_gL_g\right)dt' \\
&= \Psi_0\frac{x}{M_L^{-x}+M_U^{-x}}\left((1-at)\int_{t_L}^t\left(\frac{t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}}-M_L^{\alpha-x}}{\alpha-x}+\frac{1}{\gamma}t'^{\frac{x}{\gamma}-1}t_gL_g\right)dt'+\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& a \int_{t_L}^{t} \left(\frac{t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}+1} - M_L^{\alpha-x} t'}{\alpha - x} + \frac{1}{\gamma} t'^{\frac{x}{\gamma}} t_g L_g \right) dt' \Bigg) \\
= \quad & \Psi_0 \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} \Bigg((1-at) \int_{t_L}^{t} \left(\frac{1}{\alpha - x} t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}} - \frac{M_L^{\alpha-x}}{\alpha - x} + \frac{t_g L_g}{\gamma} t'^{\frac{x}{\gamma}-1} \right) dt' + \\
& a \int_{t_L}^{t} \left(\frac{1}{\alpha - x} t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}+1} - \frac{M_L^{\alpha-x}}{\alpha - x} t' + \frac{t_g L_g}{\gamma} t'^{\frac{x}{\gamma}} \right) dt' \Bigg) \\
= \quad & \Psi_0 \frac{x}{M_L^{-x} + M_U^{-x}} \Bigg((1-at) \left(\frac{1}{\alpha - x} \frac{\gamma}{x - \alpha + \gamma} t'^{\frac{x-\alpha+\gamma}{\gamma}} - \frac{M_L^{\alpha-x}}{\alpha - x} t' + \frac{t_g L_g}{\gamma} \frac{\gamma}{x} t'^{\frac{x}{\gamma}} \right) + \\
& a \left(\frac{1}{\alpha - x} \frac{\gamma}{x - \alpha + 2\gamma} t'^{\frac{x-\alpha}{\gamma}+2} - \frac{M_L^{\alpha-x}}{\alpha - x} \frac{1}{2} t'^2 + \frac{t_g L_g}{\gamma} \frac{\gamma}{x + \gamma} t'^{\frac{x+\gamma}{\gamma}} \right) \Bigg) \Bigg|_{t'=t_L}^{t'=t}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Vergelijking (26) ziet er niet erg mooi uit, maar Mathematica heeft er geen problemen mee. De totale $L(t)$ kun je nu uitrekenen door L_1 en L_2 op te tellen:

$$
L(t) = \begin{cases} L_1(t) + L_{2a} & \text{voor } t < t_L \\ L_1(t) + L_{2b} & \text{voor } t > t_L \end{cases}
\tag{27}
$$

2.2 F. Ψ_0

Om de lichtsterkte van onze melkweg te kunnen berekenen moeten we $L(t)$ eerst callibreren door Ψ_0 te bepalen. Dit doen we door ervan uit te gaan dat nu, $T_\odot = 10 Gyr$, $t = 1$ er een totale massa van $M = 10^{11} M_\odot$ in sterren zit.
De integraal op de paper is heel vreemd omdat er geintegreerd word van 0 tot t. Dat houd in dat het stelsel dus op elk moment $10^{11} M_\odot$ sterren heeft gegenereerd waardoor Ψ_0 afhankelijk van t moet zijn. Dit is natuurlijk niet het geval, want Ψ_0 word in andere integralen over t buiten het integraal teken gehaald. Er wordt bedoelt dat het stelsel op tijdstip $t = T_\odot$ $10^{11} M_\odot$ aan sterren heeft gecreëerd en dat er dus van 0 tot $T_\odot$ moet worden geintegreerd.

$$
\begin{aligned}
10^{11} &= \int_0^{T_\odot} \int_{M_L}^{M_U} \Psi(t') \Phi(M) M dM dt' \qquad (28) \\
&= \int_0^{T_\odot} \int_{M_L}^{M_U} \Psi_0 (1 - at) x M_L^x M^{-x} dM dt \\
&= \frac{\Psi_0 (T_\odot - \frac{1}{2} a T_\odot^2)}{1 - x} x \frac{M_L^x M_U - M_L M_U^x}{M_U^x} \\
\Psi_0 &= \frac{2.66 \cdot 10^{-9}}{1.33 \cdot 10^{-10} - a} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

2.3 G. Kleur van ons melkwegstelsel

Mathematica was ook zo vriendelijk om voor ons $L(t)$ (27) uit te rekenen om de volgende tabel te vullen: ($M = 10^{11} M_\odot$)

a	$(U-B)$	$(B-V)$	M/L_U	M/L_B	M/L_V
0	-0.520	0.243	0.484	0.897	1.190
0.8	-0.293	0.465	1.205	1.814	1.961
0.9	-0.132	0.579	1.822	2.362	2.300
0.95	0.038	0.672	2.577	2.856	2.551
1	0.414	0.817	4.731	3.709	2.901

We kunnen ook alleen het bovenste gedeelte van $L(t)$ nemen, $L_{2b}(t)$ en de rode en groene bendaderingen invullen, dan veranderd de tabel enigszins en krijgen we:

a	$(U-B)$	$(B-V)$	M/L_U	M/L_B	M/L_V
0	-0.422	0.305	0.580	0.985	1.230
0.8	-0.198	0.511	1.397	1.926	7.997
0.9	-0.047	0.612	2.056	2.465	2.327
0.95	0.104	0.694	2.814	2.934	2.569
1	0.414	0.817	4.733	3.710	2.901

Deze tabel is wel iets anders. Dat komt voornamelijk door het negeren van de lage t's, de substituties die we hebben gemaak hebben niet zoveel effect op dit resultaat. Het kiezen van de limieten van de IMF (met name de bovenlimiet M_U) is dus van best groot belang op dit model.

3 Chemische evolutie in de zonsomgeving

In dit werkstuk gelden de volgende vaste parameters:

$$\begin{aligned}
R &= 0.2 \\
T &= 15 \cdot 10^9 yr \\
T_\odot &= 10.5 \cdot 10^9 yr \\
M_{tot}(T) &= 80 M_\odot pc^{-2} \\
M_g(T) &= 8 M_\odot pc^{-2} \\
Z(T) &= 0.025
\end{aligned}$$

3.1 A. The "Simple Model"

In dit model gelden de volgende parameters:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 0 \\
g(t) &= f(t) = 0 \\
A(t) &= C_1 \cdot M_g(t) \qquad (30)
\end{aligned}$$

Formule (31) levert de volgende oplossing voor M_g en C_1 op:

$$\frac{dM_g(t)}{dt} = -(1-R)C_1 M_g(t) \qquad (31)$$

$$M_g(t) = M_g(0)e^{-(1-R)C_1 t} \qquad (32)$$

$$M_g(0) = M_{tot}(0) = M_{tot}(T) = 80 M_\odot pc^{-2} \qquad (33)$$

$$C_1 = 1.9 \cdot 10^{-10} \qquad (34)$$

Evenzo geeft het ook de oplossingen voor $Z(t)$ en P_Z:

$$\begin{aligned}
\frac{dZ(t)}{dt} M_g(t) &= P_Z A(t) && (35)\\
\frac{dZ(t)}{dt} &= P_Z C_1 && (36)\\
Z(t) &= P_Z C_1 t && (37)\\
t &= \frac{Z(t)}{P_Z C_1} && (38)\\
Z(T) &= 0.025 = C_1 P_Z T && (39)\\
P_Z &= 8.77 \cdot 10^{-3} && (40)\\
Z(t) &= 1.66 \cdot 10^{-12} t && (41)
\end{aligned}$$

De bereking van $\bar{t}$ is nu erg eenvoudig:

$$\begin{aligned}
\omega_g(t) &= C_1(1-R) && (42)\\
\nu(t) &= \int_0^t C_1(1-R)dt = C_1(1-R)t && (43)\\
D &= \int_0^{T_\odot} C_1 M_g(0) e^{-(1-R)C_1 t} e^{C_1(1-R)t} dt \\
&= \int_0^{T_\odot} C_1 M_g(0) dt = C_1 M_g(0) T_\odot && (44)\\
t_\nu &= \frac{1}{D} \int_0^{T_\odot} C_1 M_g(0) t dt = \frac{1}{D}\frac{1}{2} C_1 M_g(0) T_\odot^2 \\
&= \frac{T_\odot}{2} && (45)\\
A_0 &= \frac{M_g(0) Z_0}{P_Z} = \frac{M_g(0) \cdot 0}{P_Z} && (46)\\
\bar{t} &= T_\odot - t_\nu (1+0)^{-1} \\
&= T_\odot - \frac{T_\odot}{2} = \frac{T_\odot}{2} && (47)
\end{aligned}$$

De waarde van $S(Z)$ is:

$$\begin{aligned}
S(t) &= \frac{\int_0^t A(t)dt}{\int_0^T A(t)dt} = \frac{\int_0^t C_1 M_g(t)dt}{\int_0^T C_1 M_g(0)dt} \\
&= \frac{e^{-(1-R)C_1 t} - 1}{e^{-(1-R)C_1} - 1} && (48)\\
S(Z) &= \frac{e^{\frac{-(1-R)}{P_Z} Z} - 1}{e^{-(1-R)C_1 T} - 1} \\
&= 1.11 \left(1 - e^{-92.2 Z}\right) && (49)
\end{aligned}$$

Al het gas is door stervorming gebruikt als $M_g(t) = 0$:

$$M_g(t) = M_g(0) e^{-(1-R)C_1 t} = 0$$

$t \to \infty$

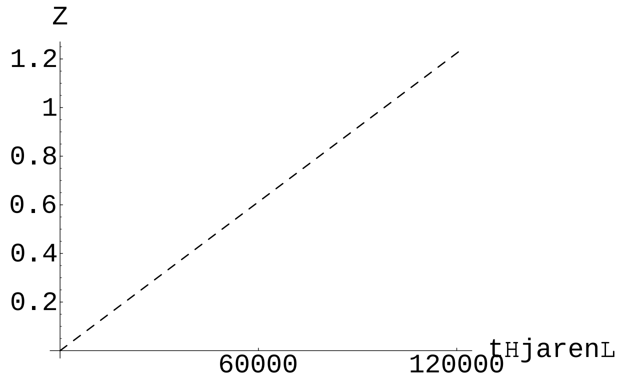

Figure 1: Abundantie tegen de tijd, model A

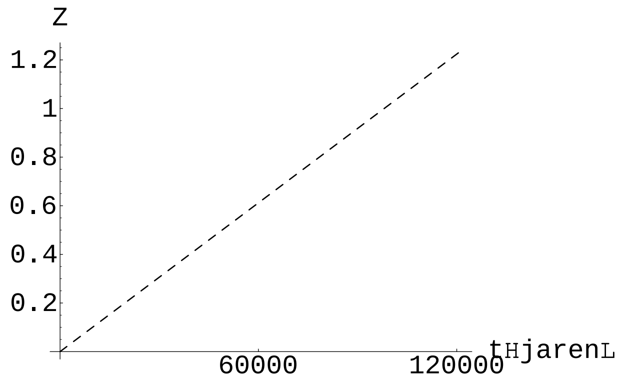

Figure 2: Fractie sterren met abundantie Z, model A

3.2 B. "Prompt Initial Enrichment"

In dit model gelden de volgende parameters, $M_g(t)$ is hetzelfde als in Model A:

$$
\begin{aligned}
A(t) &= C_1 \cdot M_g(t) && (50)\\
P_Z &= (1-R)y && (51)\\
y &= y + Z_0
\end{aligned}
$$

$$M_g(t) = M_{tot}e^{-(1-R)C_1t} \tag{52}$$

De waarde van $Z(t)$ en P_Z verandert nu door de licht gewijzigde parameters:

$$\begin{aligned}
P_Z &= (y+Z_0)(1-R) && (53)\\
Z(t) &= P_Z C_1 t + Z_0 && (54)\\
&= (y+Z_0)(1-R)C_1 t + Z_0 && (55)\\
Z(T) &= y(1-R)C_1T + Z_0(1-R)C_1T + Z_0 && (56)\\
y &= \frac{Z(T) - Z_0(1-R)C_1T - Z_0}{(1-R)C_1T} && (57)\\
Z(t) &= \left(\frac{Z(T)-Z_0}{T}\right)t + Z_0 && (58)\\
P_Z &= \left(\frac{Z_T - Z_0}{C_1T}\right) && (59)\\
&= 5.96 \cdot 10^{-3} && (60)
\end{aligned}$$

$S(Z)$ verandert nu in:

$$\tag{61}$$

$$S(t) = \frac{\int_0^t A(t)dt}{\int_0^T A(t)} \tag{62}$$

$$t(Z) = \frac{(Z-Z_0)T}{(Z_{T_\odot} - Z_0)} \tag{63}$$

$$S(t) = \frac{\int_0^t C_1 M_g(t)dt}{TM_{tot}} \tag{64}$$

$$= 1.11(1 - \exp^{1.1-136Z}) \tag{65}$$

De waarde van $\overline{t}$ wordt nu:

$$\begin{aligned}
\nu(t) &= \int_0^t -\frac{dM_g(t)}{M_g(t)} = ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(t)}\right) && (66)\\
D &= \int_0^{T_\odot} A(t)\frac{M_g(0)}{M_g(t)}dt\\
&= -\frac{M_g(0)}{1-R}\int_0^{T_\odot}\frac{dM_g(t)}{M_g(t)} = \frac{M_g(0)}{1-R}ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right) && (67)\\
t_\nu &= \frac{1-R}{M_g(0)ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right)}\int_0^{T_\odot}\frac{-M_g(0)}{1-R}\frac{dM_g(t)}{dt}t\frac{1}{M_g(t)}\\
&= \frac{-1}{ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right)}\int_0^{T_\odot} t\frac{dM_g(t)}{M_g(t)} = \frac{1}{ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right)}\left[tln\left(\frac{1}{M_g(t)}\right)\right]_0^{T_\odot}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T_\odot ln\left(\frac{1}{M_g(T_\odot)}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right)} \\
&= T_\odot\left(\frac{-lnM_g(T_\odot)}{-lnM_g(T_\odot)-lnM_g(0)}\right) \qquad (68)
\end{aligned}
$$

$$A_0 = \frac{M_g(0)Z_0}{(1-R)(Z_0+y)} \qquad (69)$$

$$\frac{A_0}{D} = \frac{Z_0}{(Z_0+y)ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right)} \qquad (70)$$

$$\bar{t} = T_\odot\left(\frac{1-\frac{-lnM_g(T_\odot)}{-lnM_g(T_\odot)-lnM_g(0)}}{1+\frac{Z_0}{(Z_0+y)ln\left(\frac{M_g(0)}{M_g(T_\odot)}\right)}}\right) \qquad (71)$$

$$= 3.84\cdot 10^9 yr \qquad (72)$$

Al het gas is door stervorming gebruikt als $M_g(t)=0$:

$$
\begin{aligned}
M_g(t) &= M_g(0)e^{-(1-R)C_1 t} = 0 \\
t \to \infty &
\end{aligned}
$$

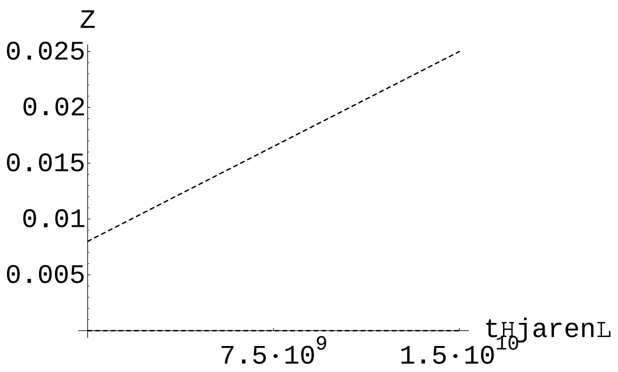

Figure 3: Abundantie tegen de tijd, model B

3.3 C. "Extreme Infall Model"

In dit model gelden de volgende parameters:

$$A(t) \propto M_g$$

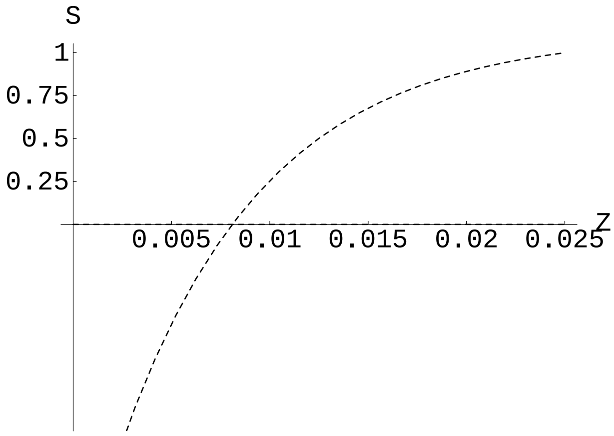

Figure 4: Fractie sterren met abundantie Z, model B

$$
\begin{aligned}
M_g &= constant \\
M_g\,(t) &= M_g\,(T) = 8 M_\odot pc^{-2} \\
Z_f &= 0 \\
Z_0 &= 0 \\
\mu &= \frac{M_{tot} - M_g}{M_g} && (73) \\
f &= (1-R)A && (74) \\
M_{tot}(t) &= M_g + f \cdot t && (75) \\
\mu &= \frac{M_g + ft - M_g}{Mg} = \frac{ft}{Mg} && (76)
\end{aligned}
$$

Dit leidt tot de oplossingen voor Z_μ, P_Z, f en A:

$$
\begin{aligned}
f\frac{dZ_\mu}{d\mu} &= -(1-R)Z_\mu A + P_Z A && (77) \\
\frac{dZ_\mu}{d\mu} &= \frac{P_Z}{1-R} - Z_\mu && (78) \\
Z_\mu &= \frac{P_Z}{1-R}(1 - e^{-\mu}) && (79) \\
Z(t) &= \frac{P_Z}{1-R}\left(1 - e^{-\frac{M_g + ft - M_g}{Mg}}\right) \\
&= 0.025\left(1 - e^{-5 \cdot 10^{-10} \cdot t}\right) && (80) \\
P_Z &= \frac{(1-R)Z(T)}{1 - e^{-\mu}} = 0.02 && (81) \\
f &= \frac{M_{tot} - M_g}{T} = \frac{80 - 8}{15 \cdot 10^9} = 4.0 \cdot 10^{-9} M_\odot pc^{-2} yr^{-1} && (82)
\end{aligned}
$$

$$A = \frac{f}{1-R} = 5.0 \cdot 10^{-9} M_{\odot} pc^{-2} yr^{-1} \tag{83}$$

De berekening van $S(t)$ is nu erg eenvoudig, de omzetting naar $S(Z)$ via de verandering van variabelen is iets meer werk:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\int_0^t A(t)dt}{\int_0^T A(t)dt} = \frac{t}{T} && (84) \\ t(Z) &= -\frac{M_g(0)}{f} ln\left(1 - \frac{1-R}{P_Z} Z\right) && (85) \\ S(Z) &= -\frac{M_g(0)}{fT} ln\left(1 - \frac{1-R}{P_Z} Z\right) && (86) \\ &= -0.133 ln(1-40Z) && (87) \end{aligned}$$

De bereking van $\bar{t}$ is enigszins ingewikkelder:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \int_0^t \frac{A(1-R)}{M_g} dt = \frac{A(1-R)}{M_g} t && (88) \\ D &= \int_0^{T_\odot} A e^{\frac{(1-R)A}{M_g} t} dt = \frac{M_g}{1-R}\left(e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - 1\right) && (89) \\ t_\nu &= \frac{A}{D} \int_0^{T_\odot} t e^{\frac{(1-R)A}{M_g} t} dt = \frac{A}{D}\left(\frac{t M_g e^{\frac{(1-R)A}{M_g} t}}{(1-R)A} - \frac{M_g}{(1-R)A} \int_0^{T_\odot} e^{\frac{(1-R)A}{M_g} t} dt\right) \\ &= \left(\frac{T_\odot M_g}{1-R} e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - \frac{M_g^2}{(1-R)^2 A}\left(e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - 1\right)\right) \frac{1-R}{M_g\left(e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - 1\right)} && (90) \\ &= T_\odot \frac{e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot}}{e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - 1} - \frac{M_g}{(1-R)A} && (91) \\ \bar{t} &= T_\odot \left(1 - \left(\frac{e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot}}{e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - 1} - \frac{M_g}{(1-R)AT_\odot}\right)\left(1 + \frac{A(1-R)}{M_g}\left(e^{\frac{(1-R)A}{M_g} T_\odot} - 1\right)\right)^{-1}\right) && (92) \\ &= 1.94 \cdot 10^9 yr && (93) \end{aligned}$$

M_g is constant, dus zal nooit al het gas opgebruikt worden door stervorming.

3.4 D. "Mixed Model"

In Model D gelden de volgende parameters:

$$\begin{aligned} \beta &= 0.6 \\ Z_0 &= 0.004 \\ f(t) &= \beta A = constant && (94) \end{aligned}$$

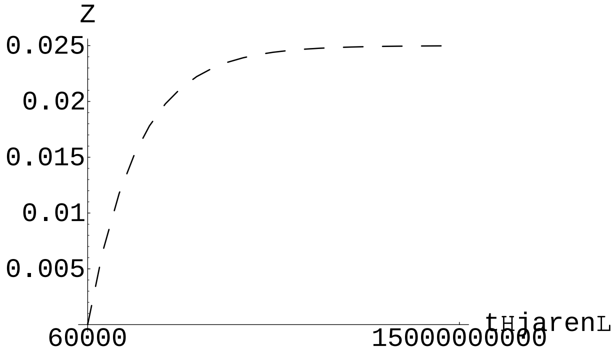

Figure 5: Abundantie tegen de tijd, model C

De oplossing van $M_g(t)$ is vrij eenvoudig:

$$\begin{aligned}\frac{M_g(t)}{dt} &= -(1-R)A + \beta A = (R+\beta-1)A \\ M_g(t) &= (R+\beta-1)At + M_g(0) = -0.2At + M_g(0) \qquad (95)\end{aligned}$$

De berekening van $Z(t)$ geeft:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(M_g(t)Z(t)) &= -1(1-R)Z(t)A + P_Z A \qquad (96)\\ \frac{d}{dt}(M_g(t)Z(t)) &= Z(t)\frac{d}{dt}M_g(t) + M_g(t)\frac{d}{dt}Z(t) \\ &= Z(t)(R+\beta-1)A + ((R+\beta-1)At + M_g(0)\frac{dZ(t)}{dt} \qquad (97)\end{aligned}$$

(96) en (97) leveren deze differentiaalvergelijking op:

$$\beta Z(t) + ((R+\beta-1)At + M_g(0))\frac{dZ(t)}{dt} - P_Z A = 0 \qquad (98)$$

$$Z(t) = \frac{P_Z}{\beta} + \left(1 + \frac{(R+\beta-1)At}{M_g(0)}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta-R}} \left(Z(0) - \frac{P_Z}{\beta}\right) \qquad (99)$$

De oplossingen van A en $M_g(0)$ zijn:

$$\begin{aligned}\frac{dM_*(t)}{dt} &= (1-R)A \qquad (100)\\ M_*(t) &= (1-R)At \qquad (101)\\ M_*(T) &= 0.8\cdot 15\cdot 10^9\cdot A = 72 M_\odot pc^{-2} \\ A &= 6\cdot 10^{-9} M_\odot pc^{-2} yr^{-1} \qquad (102)\\ M_{tot}(T) &= M_{tot}(0) + \beta AT = 80 M_\odot pc^{-2}\end{aligned}$$

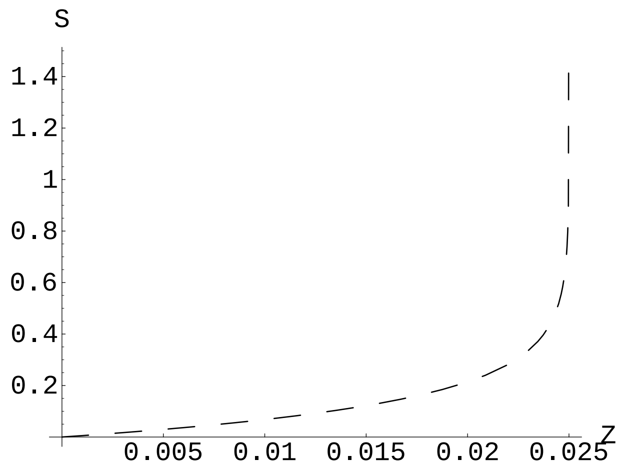

Figure 6: Fractie sterren met abundantie Z, model C

$$
\begin{aligned}
M_g(0) &= M_{tot}(0) = M_{tot}(T) - AT = 80 - 0.6 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cdot 15 \cdot 10^9 \\
M_g(0) &= 26 M_\odot pc^{-2} \qquad (103)
\end{aligned}
$$

Door $Z(T) = 0.025$ en de waardes voor A, $M_g(0)$ in (99) in te vullen krijg je P_Z:

$$P_Z = 0.015 \qquad (104)$$

De oplossing voor $\overline{t}$ is:

$$
\begin{aligned}
\nu(t) &= \int_0^t \frac{A(1-R)}{M_g(t)} = \int_0^t A(1-R) \frac{1}{(R+\beta-1)At + M_g(0)} dt \\
&= A(1-R) \frac{1}{A(R+\beta-1)} ln \left((R+\beta-1)At + M_g(0)\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{1-R}{R+\beta-1} \left(ln[(R+\beta-1)At + M_g(0)] - ln[M_g(0)]\right) \\
&= \frac{1-R}{R+\beta-1} ln \left(\frac{(R+\beta-1)A}{M_g(0)} t + 1\right) \qquad (105)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= \int_0^{T_\odot} A \left(1 - \frac{0.2A}{M_g(0)} t\right)^{-4} dt = \frac{A M_g(0)}{0.6A} \left(1 - \frac{0.2A}{M_g(0)} t\right)^{-3} \\
&= \frac{5}{3} M_g(0) \left(1 - \frac{0.2A}{M_g(0)} t\right)^{-3} \Bigg|_0^{T_\odot} \\
&= \frac{5}{3} M_g(0) \left[\left(1 - \frac{0.2A}{M_g(0)} T_\odot\right)^{-3} - 1\right] \qquad (106) \\
&= 1444 \qquad (107)
\end{aligned}
$$

$$D = \frac{M_g(0)\left(-1+\left(1+\frac{A(-1+\beta+R)T}{M_g(0)}\right)^{\frac{\beta}{-1+\beta+R}}\right)}{\beta} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
t_\nu &= \frac{M_g(0)\left(M_g(0)+(-M_g(0)+A\beta T_\odot)\left(1+\frac{A(-1+\beta+R)T_\odot}{M_g(0)}\right)^{\frac{\beta}{-1+\beta+R}}\right)}{D\cdot A\beta(-1+2\beta+R)} \\
&= \frac{-\frac{M_g(0)}{A}+\beta T_\odot\left(1+\frac{1}{-1+\left(1+\frac{A(-1+\beta+R)T_\odot}{M_g(0)}\right)^{\frac{\beta}{-1+\beta+R}}}\right)}{-1+2\beta+R} \qquad (109) \\
&= 7.41\cdot 10^9 yr \\
A_0 &= \frac{M_g(0)Z_0}{P_Z} = \frac{26\cdot 0.004}{0.015} = 6,933 \qquad (110) \\
\overline{t} &= \left(10.5 - 7.41\left(1+\frac{6.933}{1444}\right)^{-1}\right)\cdot 10^9 yr = 3.12\cdot 10^9 yr \qquad (111)
\end{aligned}$$

De berekening van $S(Z)$ geeft:

$$\begin{aligned}
Z(0) &= Z_0 \\
S(t) &= \frac{\int_0^t A(t)dt}{\int_0^T A(t)dt} = \frac{t}{T} \qquad (112) \\
t &= \frac{M_g(0)}{(1-R-\beta)A}\left[1-\left(\frac{P_Z - Z(t)\beta}{P_Z - Z_0\beta}\right)^{\frac{1-R-\beta}{\beta}}\right] \qquad (113) \\
S(Z) &= \frac{1-\left(\frac{P_Z - Z\beta}{P_Z - Z_0\beta}\right)^{\frac{1-R-\beta}{\beta}}}{1-\left(\frac{P_Z - Z_T\beta}{P_Z - Z_0\beta}\right)^{\frac{1-R-\beta}{\beta}}} \qquad (114) \\
&= 1-\left(\frac{0.025-Z}{0.021}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (115)
\end{aligned}$$

Al het gas is opgebruikt als:

$$\begin{aligned}
M_g &= 0 = (R+\beta-1)At + M_g(0) = 26 - 1.2\cdot 10^{-9}t \qquad (116) \\
t &= 2.17\cdot 10^{10} yr \qquad (117)
\end{aligned}$$

3.5 Conclusies

De resultaten van de verschillende modellen worden weergegeven in een tabel in vergelijking met de randcondities.

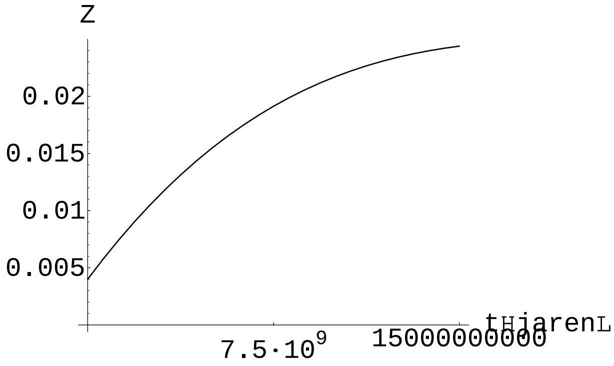

Figure 7: Abundantie tegen de tijd, model D

	Randcondities	Model A	Model B	Model C	Model D
a	$Z_0 \leq 0.008$	0	0.008	0	0.004
b	$Z_T/Z_{\frac{1}{2}T} \leq 2$	2.0	1.51	1.02	1.27
c	$f(T) \leq 5$	0	0	4.0	3.6
d	$A(T)$ const. of langzaam afnemend?	ja	ja	ja	ja
e	S(< 0.0075) ≈ 0.1	0.55	0.20	0.04	0.058
f	$3 \leq \bar{t} \leq 7$ Gyr	5.25	3.84	1.94	3.12

Het model dat het beste aan de meeste randcondities voldoet is Model D, maar hier zijn dan ook de meeste parameters gebruikt.

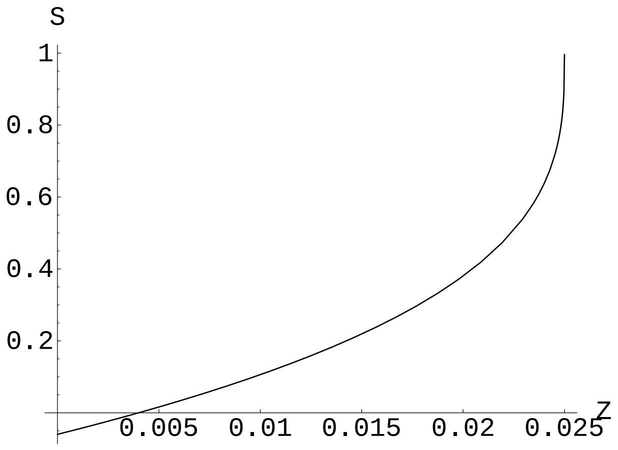

Figure 8: Fractie sterren met abundantie Z, model D

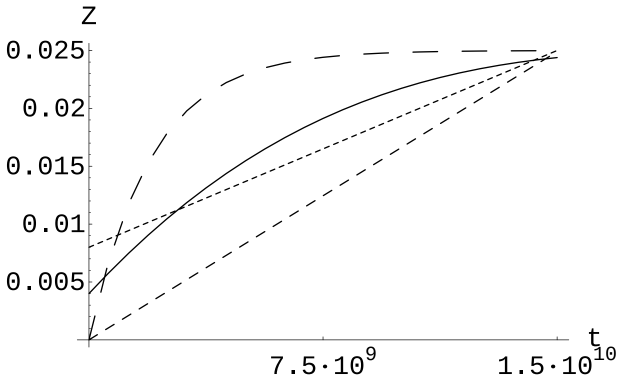

Figure 9: Een gecombineerde plot van het verloop van de abundantie voor de verschillende modellen.

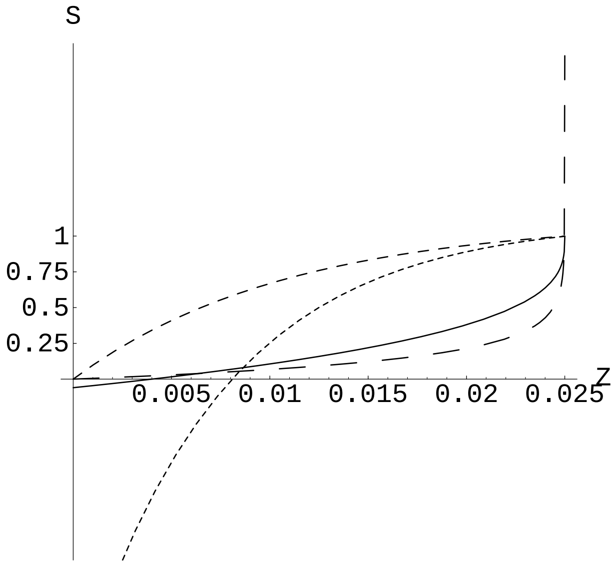

Figure 10: Een gecombineerde plot van het verloop van de fractie van het aantal sterren met een abundantie kleiner dan Z